

## Unsicherheit von angrenzenden Formelementen

Michael Hernla, Dortmund

*Manuskriptfassung; in überarbeiteter Form veröffentlicht in:  
Qualität und Zuverlässigkeit, München, 38 (1993) 6, S. 373-378*

Die mit einem beliebigen Messsystem aufgenommenen Daten enthalten sowohl systematische als auch zufällige Anteile der Messwerte. Diese lassen sich jeweils auf verschiedene Ursachen zurückführen und auf unterschiedliche Weise für die Auswertung nutzen. Ausgehend vom systematischen Messwertanteil kann man beliebige idealgeometrische Ersatzelemente berechnen. Der zufällige Messwertanteil enthält auch den Einfluss der Messpunktanzahl. Er dient damit zum Abschätzen der Messunsicherheit und zum Beurteilen der Messgenauigkeit für die Parameter Maß, Form und Lage.

**Uncertainty of geometric Features in geometrical Measurement.** Data collected by measuring systems are containing both systematic and random terms. These can be traced back on different reasons and may be used for exploration in various ways. The systematic term is the starting point for calculation of any ideally geometric features. The random term of measuring data also contains the influence of number of measuring points. It is used for uncertainty estimation and measurement precision assessment of departures from nominal form and as well position as size parameters.

### Idealgeometrische Ersatzelemente

Ein Grundproblem bei geometrischen Messungen ist die Angabe des Messergebnisses. Die Menge der Ausgangswerte wird in der Regel zu einem idealgeometrischen Ersatzelement verdichtet, dessen Parameter als Messergebnisse angesehen werden. Es existieren unterschiedliche Standpunkte darüber, welche Ersatzelemente am besten zur Ergebnisdarstellung geeignet sind. Die heute bei Koordinatenmessgeräten meist verwendeten Algorithmen nehmen auf die mittleren (Ausgleichs-) Elemente Bezug. Die Funktion vieler Oberflächen als Paarungselemente legt dagegen die Berechnung von angrenzenden Formelementen nahe. Für Formabweichungen ist in DIN ISO 1101 [1] die Verwendung von Elementen mit minimaler Breite vorgeschrieben. In anderen Normen, z.B. im British Standard 7172 [2] und im Entwurf von DIN 32880 [3], werden auch andere Ersatzelemente zugelassen. Sie sind zum Ergebnis mit anzugeben.

Alle diese Ansätze haben ihre Nachteile. Die mittleren Elemente widerspiegeln nur bedingt das Paarungsverhalten, angrenzende und Minimum-Elemente stützen sich bei den bisher verwendeten Algorithmen auf wenige extreme Punkte aus der Menge der angetasteten Punkte ab. Damit werden die Ergebnisse sehr unsicher und anfällig gegen Messfehler, besonders Ausreißer. Ein besonderer Mangel der beiden letzteren Ersatzelemente ist, dass noch keine Möglichkeit gefunden wurde, ihre Messunsicherheit quantitativ anzugeben. Lediglich bei den Ausgleichselementen kann dieses Problem (bis auf die Formabweichung) als gelöst betrachtet werden.

Bisher waren keine Möglichkeiten zur Angabe von Messunsicherheiten für Formabweichungen bekanntgeworden. Diesbezügliche Untersuchungen beruhen auf Reihen von Wiederholungsmessungen und geben im besten Fall Empfehlungen für Mindestpunktzahlen. Dieser Weg ist jedoch sehr aufwendig und in seiner Anwendbarkeit meist auf die untersuchten Sonderfälle beschränkt. Deshalb soll an dieser Stelle ein anderer Ansatz vorgestellt und seine Umsetzung am Beispiel des Kreises demonstriert werden.

### Modell

Das wesentliche Problem bei geometrischen Messungen, besonders bei Koordinatenmessungen, ist die relativ geringe Messpunktanzahl. Es wird eine Stichprobe aus der (unendlichen) Menge der Oberflächenpunkte genommen, aus welcher dann nach den verschiedenen bekannten Algorithmen die Ergebnisparameter berechnet werden. An dieser Stelle wird aber schon der Oberflächenverlauf zwischen den bekannten Antastpunkten völlig außer acht gelassen. Die Messpunkte werden z.B. in grafischen Darstellungen mit Geradenstücken verbunden, womit schon eine Annahme über den

Oberflächenverlauf zwischen diesen Punkten getroffen wird. Diese Annahme stellt bei sehr großen Punktzahlen eine Näherung für den tatsächlichen Oberflächenverlauf dar, besonders bei wenigen Punkten können jedoch erhebliche Abweichungen auftreten.

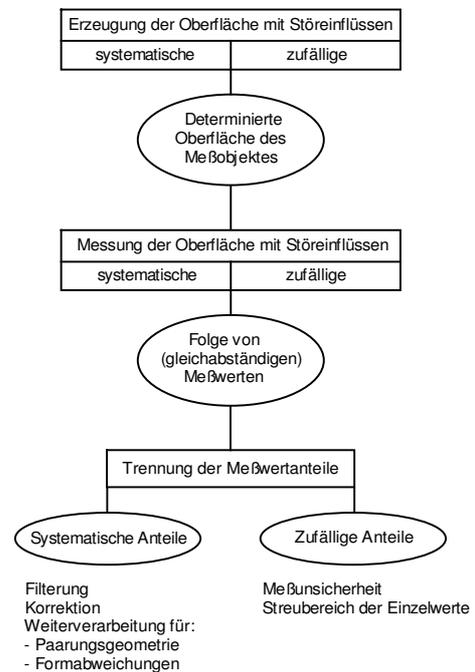
Die Frage ist nun, wie diese Tatsache bei der Auswertung berücksichtigt und die Größe dieser Abweichungen abgeschätzt werden kann. Gesucht ist ein Modellansatz, der auch den Einfluss der Messpunktzahl und -anordnung als zufällige Faktoren beschreibt [4]. Dazu ist zunächst eine Betrachtung der Vorgeschichte der Prüflingsoberfläche erforderlich.

Die Oberfläche wird in einem Fertigungsprozess erzeugt, wobei ihre Gestalt durch das Einwirken von systematischen und zufälligen Einflüssen bestimmt wird. Systematische Einflüsse sind z.B. die Sollgeometrie, die Werkzeuggeometrie (Eckenradius eines Drehmeißels o.ä.), der Vorschub, aber auch Führungsabweichungen der Werkzeugmaschine. Daneben treten zufällige Einflüsse auf, z.B. Schwingungen, Verschleiß, unterschiedliche Deformation des Werkstücks bei der Bearbeitung infolge von Festigkeitsunterschieden. Die Grenze zwischen beiden Gruppen ist fließend. Sie lässt sich verschieben, wenn die einzelnen Einflüsse erfasst und beschrieben werden können. Auch wenn er durch entsprechenden Aufwand klein gehalten werden kann, wird immer ein Anteil zufälliger Abweichungen übrigbleiben.

Die Oberfläche enthält in ihrer Gestalt also Abweichungen, die sowohl systematische als auch zufällige Ursachen haben. Für die Messung ist die Gestalt jedoch eindeutig bestimmt, setzt man voraus, dass sie dabei nicht verändert wird.

Bei der Messung selbst treten nun wieder systematische und zufällige Einflüsse auf, die sich überlagern. Systematische Einflüsse sind z.B. Führungsabweichungen des Messgerätes, Tasterbiegung und Tasterradius, zufällige z.B. Positionierungsunsicherheit, Schwingungen und Digitalisierungsfehler. Verformungen des Gesamtsystems Prüfling, Messgerät und Taster gehören ebenfalls hierher. Von den Möglichkeiten zu ihrer Erfassung und Kompensation hängt es ab, ob sie den zufälligen oder den systematischen Einflüssen zuzurechnen sind. Ganz wesentlich ist nach dem oben Gesagten die Zahl und Lage der Antastpunkte.

Am Ende der Messwertaufnahme liegt eine Menge von Messwerten vor, die je zwei systematische und zufällige Anteile der Abweichungen von der Sollgeometrie aus der Fertigung und der Messung enthalten. Im **Bild 1** ist dieser Sachverhalt noch einmal im Überblick dargestellt. Es lässt sich anhand der Messwerte nicht ohne weiteres feststellen, ob die Abweichungen allein durch das Messgerät verursacht wurden, oder ob die Abweichungen bereits in der Oberfläche enthalten sind. Ein Unterscheidungsmerkmal ist aber z.B. die Größe der Abweichungen. Sind sie deutlich größer als die (bekannten) Abweichungen des Messgerätes, liegt ihre Ursache sicher in der Prüflingsoberfläche.



**Bild 1:**  
Modell zur Auswertung von Messwertfolgen aus gemessenen Oberflächenprofilen

Es ist mit mathematischen Methoden möglich, die systematischen und zufälligen Anteile der Abweichungen voneinander zu trennen und einzeln mit den bekannten Abweichungen des Messgerätes zu vergleichen. Liegen beide Anteile in der Größenordnung der bekannten Abweichungen des Messgerätes, kann angenommen werden, dass die Abweichungen des Prüflings mit dem verwendeten Messgerät nicht nachweisbar sind.

In vielen Fällen werden jedoch beide Anteile größer sein. Der systematische Messwertanteil beschreibt dann die Abweichungen des Prüflings von seiner Sollgeometrie, die noch von den systematischen

Abweichungen des Messgerätes überlagert sind. Der zufällige Anteil hat ebenfalls seine Ursache in der Fertigung und in der Messung, auch hier kann nur eine Kenngröße angegeben werden. Diese beschreibt z.B. als Messunsicherheit den Vertrauensbereich des systematischen Messwertanteils und ist damit ein direktes Maß für die Güte der Messung. Der systematische Messwertanteil kann für weitere Auswertungen verwendet werden. Dabei pflanzen sich ihre Unsicherheiten ebenfalls fort. Sie können durch das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz bestimmt werden.

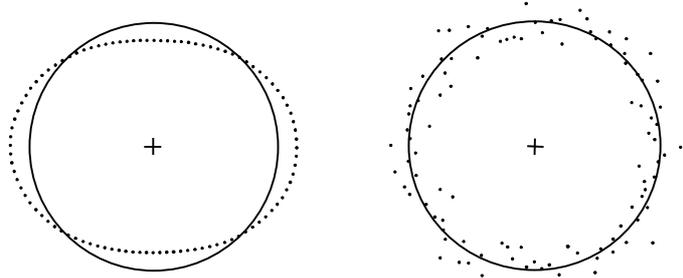
Bei der Trennung der systematischen und zufälligen Messwertanteile treten zwei Probleme auf. Das erste ist die Wahl von geeigneten Funktionsansätzen zur Beschreibung des systematischen Anteils, das zweite die Identifizierung des zufälligen Anteils. Sie werden in den folgenden Abschnitten behandelt. Von besonderem Interesse ist die Frage, ob die Verfahren zur Trennung der Messwertanteile bei den gerade in der Koordinatenmesstechnik üblichen kleinen Messpunktzahlen anwendbar sind.

### Identifizierung zufälliger Messwertanteile

Die Möglichkeiten zur Erkennung zufälliger Messwertanteile sind in der mathematischen Statistik bekannt, wurden bisher jedoch in der geometrischen Messtechnik kaum angewendet. An einem Beispiel sollen einige aufgezeigt werden.

Das **Bild 2** zeigt zwei typische Kreisprofile im Vergleich. Es handelt sich um jeweils 100 Punkte, die ein elliptisches Profil (links) und ein zufälliges Profil (rechts) repräsentieren. Das erste wurde durch eine dem Ausgleichskreis überlagerte Sinusfunktion erzeugt, letzteres durch eine Menge normalverteilter Zufallszahlen.

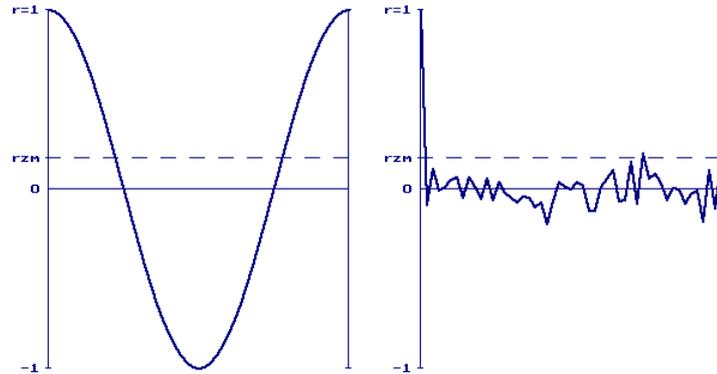
Bild 2:  
Typische Kreisformprofile; links  
elliptisches, rechts zufälliges Profil  
(gleiche Standardabweichung)



Das elliptische Profil weist zusammenhängende Bereiche auf, in denen sich das Vorzeichen der Abweichungen nicht ändert. Bei dem zufälligen Profil wechseln die Vorzeichen willkürlich, es ist keine Regelmäßigkeit zu erkennen. Es sind sogenannte Vorzeichentests bekannt, die beim Vergleich von Messreihen mit einer vorgegebenen statistischen Sicherheit einen Zusammenhang der Messwerte bestätigen oder verwerfen.

Bei dem elliptischen Profil weisen benachbarte Antastpunkte nur geringe Unterschiede in ihren Abweichungen vom Ausgleichskreis auf, während beim zufälligen Profil unabhängig von der Abweichung eines Punktes der danebenliegende eine beliebig große Abweichung innerhalb des Streubereiches hat. Dieser Zusammenhang kann für wachsende Punktabstände durch die Autokorrelationsfunktion dargestellt werden. Für die Beispiele aus Bild 2 werden sie im **Bild 3** gezeigt. Die einzelnen Korrelationskoeffizienten ändern sich beim elliptischen Profil mit wachsendem Punktabstand nur langsam, beim zufälligen Profil schwanken sie dagegen nur wenig um Null.

Bild 3:  
Autokorrelationsfunktionen  
für die Profile aus Bild 2 mit  
Zufallshöchstwert des  
Korrelationskoeffizienten;  
links elliptisches, rechts  
zufälliges Profil



Zum Prüfen der Abweichungen auf Unabhängigkeit ist der empirische Korrelationskoeffizient für benachbarte Antastpunktabweichungen zu berechnen. Für den Kreis als geschlossenes Profil gilt:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i \delta_{i+1}}{\sum_{i=1}^n \delta_i^2} \quad \text{mit } \delta_{n+1} = \delta_1 \quad (1)$$

Bei offenen Profilen, z.B. Geraden oder Kreisausschnitten, besteht kein Zusammenhang zwischen Anfangs- und Endpunkt. Im Zähler tritt ein Summand weniger auf, und deshalb ist zum Ausgleich ein Normierungsfaktor einzuführen:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \delta_i \delta_{i+1}}{\sum_{i=1}^n \delta_i^2} \frac{n}{n-1} \quad (2)$$

Ist der Korrelationskoeffizient Null, sind die Abweichungen unkorreliert. Sie sind auch unabhängig, wenn sie normalverteilt sind. Der empirische Korrelationskoeffizient nach (1) bzw. (2) kann in bestimmten Grenzen um Null schwanken. Die Testgröße

$$T = r \sqrt{\frac{n-p}{1-r^2}} \quad (3)$$

ist  $t$ -verteilt mit  $n-p$  Freiheitsgraden. Dabei ist  $p$  die Anzahl der freien Parameter des Formelementes. Mit der statistischen Sicherheit  $P=1-\alpha$  erhält man den Zufallshöchstwert des Korrelationskoeffizienten:

$$r_{z\max} = \frac{t}{\sqrt{n-p+t^2}} \quad \text{mit } t = t_{1-\alpha, n-p} \quad (4)$$

Für die Fragestellung interessiert nur die obere Grenze. Deshalb ist der Wert der  $t$ -Verteilung der Tafel für die einseitige statistische Sicherheit  $P=1-\alpha$  zu entnehmen [8].

Liegt der Korrelationskoeffizient einer Messwertfolge unter dem Wert nach (4), kann sie mit der statistischen Sicherheit  $P$  als unabhängig angesehen werden. Die Voraussetzung der Normalverteilung wird anhand der Häufigkeitsverteilung der Abweichungen geprüft.

Im Bild 3 sind die Zufallshöchstwerte mit eingezeichnet. Rechts verläuft die Autokorrelationsfunktion unterhalb des Zufallshöchstwertes um Null. Die Messwerte sind voneinander unabhängig. Im linken Bild ist der Korrelationskoeffizient nach Gleichung (1) fast eins, die Abweichungen sind korreliert bzw. voneinander abhängig.

### Approximation von Kreisprofilen durch angenäherte harmonische Analyse und Profilsynthese

Die Möglichkeit der Entwicklung von Kreisprofilen durch endliche Fourierreihen wurde bereits von anderen Autoren angedeutet, bisher sind jedoch keine weiteren Ergebnisse bekanntgeworden. Deshalb soll hier ein Überblick gegeben werden.

Eine beliebige Funktion  $f(x)$  mit der Periode  $2\pi$  lässt sich angenähert als Summe trigonometrischer Funktionen darstellen:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad \text{mit } k=1, 2, \dots, h \quad (5)$$

Die Fourierkoeffizienten  $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  sind so zu bestimmen, dass die Summe der Abweichungsquadrate ein Minimum wird. Für eine beliebig wachsende Anzahl  $h$  der Koeffizienten konvergiert dann die Näherungsfunktion gegen  $f(x)$ .

Bei der hier betrachteten Problemstellung ist  $f(x)$  durch die Messwerte  $\delta_i$  gegeben. Die Bedingung für das Minimum der Quadratsumme ist, dass die partiellen Ableitungen der Zielfunktion nach den einzelnen Koeffizienten für alle Messwerte Null sind. Im allgemeinen Fall sind die Messwerte nicht gleichabständig und nur über einen Teil der Periode  $2\pi$  angeordnet. Für den Sonderfall der gleichabständigen Messpunktanordnung über den ganzen Umfang ergibt sich:

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \quad a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \cos k\phi_i \quad b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \sin k\phi_i \quad (6)$$

Die mittlere Abweichung  $a_0$  sowie  $a_1$  und  $b_1$  als Koeffizienten der 1. Harmonischen sind beim Ausgleichskreis Null. Der aktuelle Abstand eines Profilpunktes vom Kreismittelpunkt lautet mit  $r$  als Radius des Ausgleichskreises und Gleichung (5):

$$f(x) = r + \sum_{k=1}^h c_k \cos k(\phi - \phi_{k0}) \quad \text{mit } c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{und } \phi_{k0} = \frac{1}{k} \arctan \frac{b_k}{a_k} \quad (7)$$

Für den Vorgang gibt es beim Kreis eine anschauliche geometrische Deutung: Die Antastpunkte werden auf dem Kreisumfang umverteilt, indem ihre Polarwinkel mit den Faktoren  $k$  multipliziert werden. In die neu entstandenen Kreisprofile werden Kreise mit dem Radius des Ausgleichskreises gerechnet, deren Mittelpunkte in den Koordinaten  $X$  und  $Y$  gegenüber dem Ausgleichskreis versetzt sind. Diesem Versatz entsprechen die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$ . Die Koeffizienten  $c_k$  beschreiben die Exzentrizität als maximale Ablage des Mittelpunktes und gleichzeitig die Amplitude der Harmonischen, die  $\phi_{k0}$  den Phasenwinkel.

Werden aus den  $n$  Messwerten alle  $n$  möglichen Koeffizienten berechnet, beschreibt die Funktion (7) genau den Verlauf der Messwerte. Die Quadratsumme der Restabweichungen wird Null, man spricht von trigonometrischer Interpolation.

Eine Approximation im Sinne einer minimalen Quadratsumme der Restabweichungen erhält man auch, wenn nur ein Teil der Harmonischen zur Synthese des mittleren Profils nach (7) benutzt wird. Die Amplituden  $c_k$  der berechneten Harmonischen haben unterschiedliche Größen. Treten nur zufällige Antastpunktabweichungen auf, sind die Amplituden klein. Zur Profilsynthese werden sinnvoll nur die determinierten Harmonischen ab einer bestimmten Größe benutzt. Dazu sind sie von den zufälligen zu trennen.

Ein Kriterium wurde bereits mit dem Zufallshöchstwert des Korrelationskoeffizienten vorgestellt. Ein weiteres ist die Größe der Amplitude selbst - hier kann aus der Verteilungsdichte der Fourierkoeffizienten ebenfalls ein Zufallshöchstwert abgeleitet werden. Dieser wird im folgenden Abschnitt angegeben. Im Falle der Messung eines Kreisausschnittes ist der Sonderfall nach Gleichung (6) nicht mehr anwendbar. Ein geeignetes Verfahren ist in [6] beschrieben.

### Verteilungsdichte der Fourierkoeffizienten und Unsicherheit des synthetisierten Profils

Der Zufallshöchstwert für die Amplituden der Harmonischen kann aus den Eigenschaften der Fourierkoeffizienten für unabhängige und normalverteilte Messwertanteile abgeleitet werden. Sie wurden in [5] für den Fall gleichabständiger Antastpunkte am Vollkreis untersucht. Die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  sind normalverteilt und haben die Standardabweichung:

$$\sigma_a = \sigma_b = \sqrt{\frac{2}{n}} \sigma \quad (8)$$

Dabei ist  $s$  die Standardabweichung der unabhängigen und normalverteilten Messwertanteile. Die Amplituden  $c_k$  sind Rayleigh-verteilt, die Phasenwinkel  $\phi_{k0}$  über den Kreisumfang gleichverteilt. Die Verteilungsdichte der  $c_k$  ist:

$$p(c_k = c) = \frac{nc}{2\sigma^2} e^{-\frac{nc^2}{4\sigma^2}} \quad (9)$$

Aus dem Wahrscheinlichkeitsintegral kann für eine gegebene statistische Sicherheit  $P$  der Zufallshöchstwert der Amplitude berechnet werden:

$$c_{zmax}(P) = \sqrt{\frac{-4\sigma^2}{n} \ln(1-P)} \quad (10)$$

Bei Koordinatenmessungen werden meist relativ wenige Punkte angetastet. Die Messung ist als Stichprobe aufzufassen. Hier ist die empirische Standardabweichung  $s_r$  aus den Restabweichungen  $\delta_{ri}$  der Messpunkte zum synthetisierten Profil abzuschätzen. Die Anzahl der freien Parameter ergibt sich als Summe der zur Profilsynthese benutzten Koeffizienten – drei für den Ausgleichskreis und je zwei für jede determinierte Harmonische:

$$s_r = \sqrt{\frac{1}{n-(3+2h)} \sum_{i=1}^n \delta_{ri}^2} \quad (11)$$

Bei Stichproben ist für die  $a_k$  und  $b_k$  statt der Normal- die  $t$ -Verteilung anzusetzen, für die  $c_k$  erhält man die  $F(f_1, f_2)$ -Verteilung. Für die  $a_k$  und  $b_k$  ergibt sich der Vertrauensbereich sowie für die  $c_k$  der Zufallshöchstwert zu:

$$U_a = U_b = \sqrt{\frac{2}{n}} s_r t_{1-\alpha/2, n-p} \quad (12)$$

$$c_{zmax} = \sqrt{\frac{2}{n}} s_r \sqrt{2F_{2, n-p, 1-\alpha}} \quad (13)$$

Für große Messpunktzahlen  $n$  nähern sich die Werte denen nach (8) bzw. (10) an. Das synthetisierte Profil approximiert den mittleren Verlauf der Messwerte. Es ist jedoch auch mit einer Unsicherheit behaftet. Die Anwendung des quadratischen Fortpflanzungsgesetzes der Messabweichungen auf (7) für die unabhängigen Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  liefert die Varianz des Profils. Für die gleichabständigen Antastpunkte am Vollkreis ist die Varianz der Kreislinie des Ausgleichskreises konstant. Mit (8), (11) und (12) ergibt sich der (zweiseitige) Vertrauensbereich  $U_{SP}$  des synthetisierten Profils für die statistische Sicherheit  $P=1-\alpha$ :

$$U_{SP} = \sqrt{\frac{3+2h}{n}} s_r t_{1-\alpha/2, n-(3+2h)} \quad (14)$$

### Vorgehen bei praktischen Messungen

Bei praktischen Messungen sind die determinierten Harmonischen und der zufällige Messwertanteil zunächst nicht bekannt. Der Korrelationskoeffizient liefert lediglich eine Aussage, ob die Messwerte unkorreliert sind oder auch determinierte Anteile enthalten. Deshalb wird eine harmonische Analyse durchgeführt und mit der Standardabweichung der Messpunkte am Ausgleichselement der Zufallshöchstwert für die Amplituden nach (13) ermittelt. Liegen einzelne Amplituden darüber, sind diese als determiniert zu betrachten. Aus den verbleibenden Restabweichungen wird mit (11) erneut die Standardabweichung abgeschätzt. Der Vorgang wird solange wiederholt, bis der Anteil der Harmonischen oberhalb des Zufallshöchstwertes dem für die statistische Sicherheit zulässigen Anteil entspricht. Der Korrelationskoeffizient der Restabweichungen liegt dann ebenfalls unterhalb seines Zufallshöchstwertes.

Bei der Messung überlagern sich die durch Messgerät und Taster verursachten Abweichungen mit dem Oberflächenprofil. Ihre Größe kann durch die Messung eines geeigneten Normals mit vernachlässigbar kleinen Formabweichungen ermittelt werden. Auch hier erhält man eine Standardabweichung der zufälligen Restabweichungen. Diese ist als Kenngröße für die zufälligen Abweichungen des Messgerätes einschließlich des Tasters aufzufassen. Sie kann bei der Messung eines beliebigen

Werkstückes nicht unterschritten werden, so dass ein weiteres Kriterium zum Abbruch des Verfahrens zur Verfügung steht.

Vielfach gemachte Erfahrungen besagen, dass sich schon bei Verwendung der 2. bis 15. Harmonischen die Mehrzahl der Profile gut beschreiben lässt. Die harmonische Analyse kann also meist auf diesen Ausschnitt des Spektrums beschränkt werden.

Das **Bild 4** zeigt ein Beispiel. In die Messpunkte wurde ein Ausgleichskreis gerechnet, das Histogramm der Abweichungen zeigt eine asymmetrische Verteilung. Das Spektrum der Harmonischen zeigt deutlich die erwartungsgemäß dominierende 3. Harmonische. Den Verlauf des aus den determinierten Harmonischen (2.-7.) synthetisierten Profils zeigt das **Bild 5**. Außerdem sind die Restabweichungen des synthetisierten Profils sowie ihre Häufigkeitsverteilung dargestellt. Es liegt eine gute Annäherung an die Normalverteilung vor. Das Bild zeigt ebenfalls die Häufigkeitsverteilung der verbleibenden zufälligen Restharmonischen, die sich gut an die ideale Rayleigh-Verteilung annähert. Die eine oberhalb der 95%-Grenze liegende Harmonische entspricht dem zulässigen Anteil und wurde deshalb nicht zur Profilsynthese verwendet.

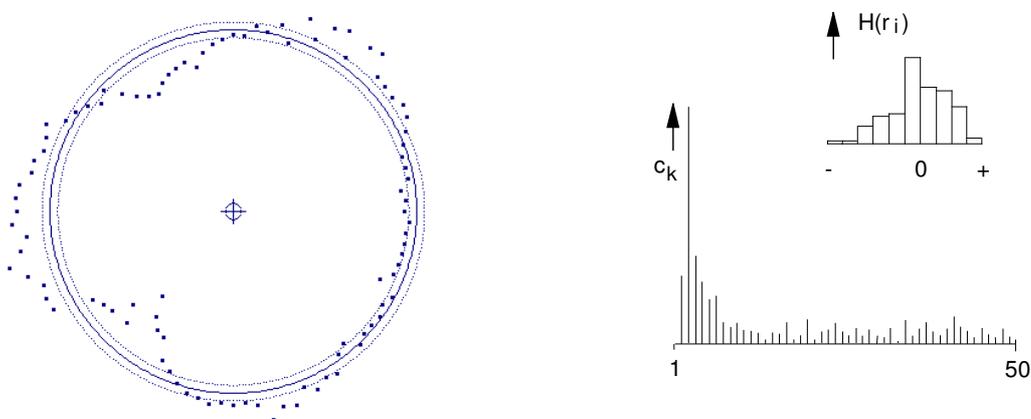


Bild 4: Gemessenes Kreisprofil aus 100 Punkten mit Ausgleichskreis, Spektrum der Harmonischen und Häufigkeitsverteilung der Messpunktabweichungen

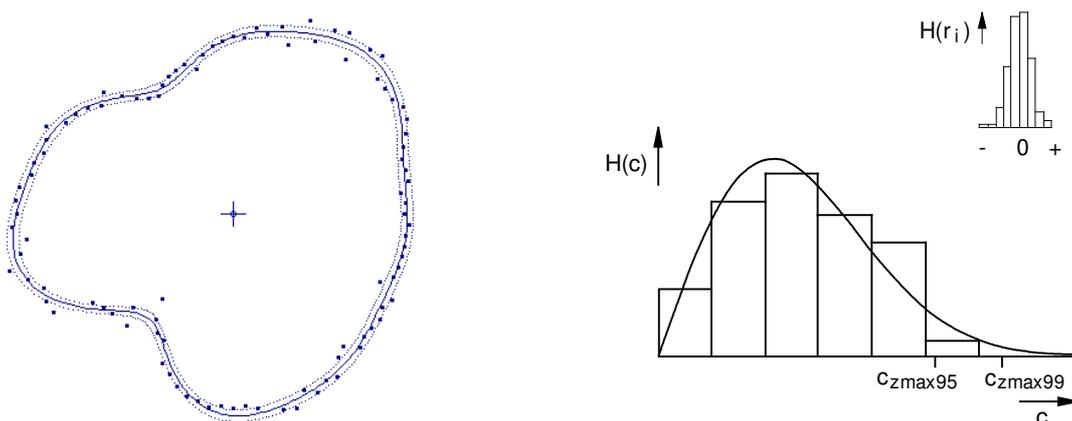


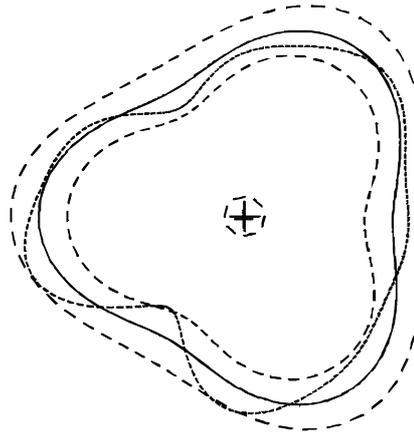
Bild 5: Messpunkte aus Bild 4 mit dem synthetisiertem Profil, den Häufigkeitsverteilungen der Restharmonischen und der Restabweichungen sowie den Zufallshöchstwerten der Amplitude

Das angegebene Beispiel wurde mit  $n=100$  Messpunkten gemessen. Aus dieser Punktmenge können Teilmengen von je  $n=10$  gleichabständigen Messpunkten als Stichproben entnommen werden. Für diese lassen sich ebenfalls die Ausgleichskreise berechnen und die harmonische Analyse durchführen. Es wurde jeweils eine Harmonische gefunden, deren Amplitude oberhalb des Zufallshöchstwertes liegt. Auch hier können die synthetisierten Profile und ihre Konfidenzbereiche berechnet werden. Einen



solchen Fall zeigt das **Bild 6**. Zusätzlich ist das synthetisierte Profil aus Bild 5 eingezeichnet. Es wird weitgehend vom Konfidenzbereich des Stichprobenprofils überdeckt. Für alle zehn Stichproben liegt der nicht überdeckte Anteil im Bereich von 5%, was bei der gewählten statistischen Sicherheit zulässig ist. Damit lässt sich schlußfolgern, dass das beschriebene Verfahren auch für kleine Messpunktzahlen anwendbar ist, solange wenigstens eine determinierte Harmonische gefunden werden kann. Die Richtigkeit des Verfahrens kann durch Messreihen oder auch mittels Rechnersimulation geprüft werden. Eine Beschreibung des Vorgehens und der Ergebnisse wird in [6] gegeben.

Bild 6:  
Stichprobe von 10 Punkten aus den Messwerten von Bild 4 mit synthetisiertem Profil, Konfidenzbereich und synthetisiertem Profil aus Bild 5



Die Approximation der Messwerte durch das synthetisierte Profil weist zwei wesentliche Vorteile auf. Der erste ist die Reduzierung der Datenmenge. Selbst bei sehr vielen Messwerten wird der Oberflächenverlauf durch einige wenige Koeffizienten beschrieben, siehe Gleichung (7). Damit wird die rechentechnische Handhabung für weitere Auswertungen deutlich vereinfacht. Der zweite Vorteil ist die geschlossene Darstellung der Oberfläche. Auch bei nur wenigen Messpunkten wird sie durch das synthetisierte Profil lückenlos beschrieben. Die Breite des Konfidenzbereiches ist ein Maß für die Güte der Approximation bei der gewählten statistischen Sicherheit.

### Angrenzende Formelemente

Die Anlage der angrenzenden Elemente am synthetisierten Profil ist eindeutig. Beim Kreis sind es Kreise mit minimalem bzw. maximalem Durchmesser (Hüllkreis oder Pufferkreis), bei geraden Profilen ist es eine Gerade mit der minimalen Formabweichung. Es empfiehlt sich, bei der Berechnung den sogenannten Einschachtelungsalgorithmus anzuwenden [7]. Für das synthetisierte Profil werden zunächst Punkte mit relativ großen Abständen (z.B.  $5^\circ$ ) und durch diese ein Ausgleichskreis berechnet. Dann werden alle auf einer Seite liegenden Punkte eliminiert, z.B. beim Hüllkreis alle innerhalb des Ausgleichskreises. Mit den verbleibenden Punkten wird erneut ein Ausgleichskreis berechnet und das Vorgehen solange wiederholt, bis eine genügend genaue Annäherung an das synthetisierte Profil erreicht ist. Dabei sind in den verbleibenden Abschnitten die Profilpunkte in kleineren Abständen neu zu berechnen. Die Schrittweite der Darstellung des synthetisierten Profils beeinflusst die Güte der Annäherung. Für den Abbruch der Iteration wird zweckmäßig eine Schranke festgelegt, z.B. für die Verbesserung des Durchmessers oder für die Annäherung an das synthetisierte Profil.

Die Berechnung des an drei Profilpunkten anliegenden Kreises kann mit dem Ausgleichskreisalgorithmus erfolgen. Die Unsicherheit der Anlagepunkte nach (14) geht nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz in die Unsicherheit des angrenzenden Kreises ein.

Für das Beispiel aus den Bildern 4 und 5 sind im **Bild 7** das synthetisierte und das angrenzende Profil (Hüllkreis) mit ihren Konfidenzbereichen dargestellt. Der Konfidenzbereich des Hüllkreises ist über den Umfang unterschiedlich breit, da die Anlagepunkte nicht genau um  $120^\circ$  versetzt angeordnet sind.

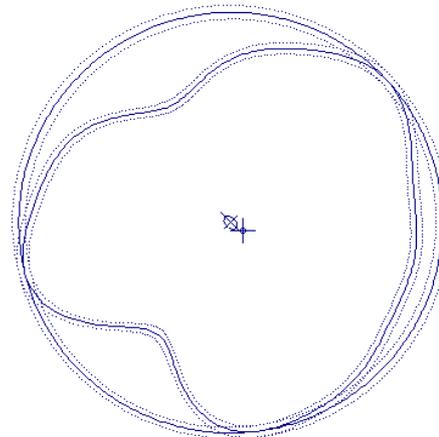


Bild 7:  
Synthetisiertes Profil mit Hüllkreis  
und Konfidenzbereichen

Eine Paarung des Werkstückes mit dem formidealen Gegenstück, das den Durchmesser des angrenzenden Elementes hat, ist jedoch nicht möglich. Die Ursache ist der zufällige Anteil der Messwerte: die Restabweichungen streuen symmetrisch zum synthetisierten Profil. Dieser Streubereich ist bei der Angabe des Paarungsmaßes zu berücksichtigen. Ist die Verteilung der Restabweichungen bekannt, kann er als statistischer Anteilsbereich abgeschätzt werden. Mit diesem Begriff wird der Bereich bezeichnet, innerhalb dessen mit einer vorgegebenen statistischen Sicherheit  $P=1-\alpha$  ein bestimmter Anteil  $p$  der Messwerte zu erwarten ist. Für normalverteilte Messwerte sind die Faktoren als Funktion der Standardabweichung in [9] tabelliert.

Bei gemessenen Stichproben sind die statistischen Anteilbereiche für den Fall unbekannter Erwartungswerte und Varianzen mit der Standardabweichung der Restabweichungen abzuschätzen. Im **Bild 8** sind die Anteilsgrenzen für einen Anteil von  $p=95\%$  der Messwerte bei der statistischen Sicherheit  $P=1-\alpha=95\%$  eingezeichnet. Für das synthetisierte Profil ist der Anteilsbereich zweiseitig, für das angrenzende Profil sinnvoll einseitig zu berechnen. Die Anteilbereiche sind deutlich breiter als die Konfidenzbereiche.

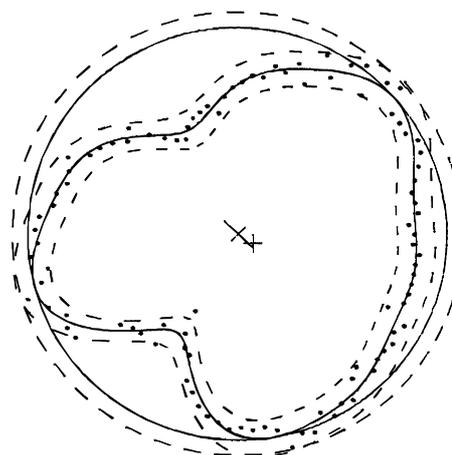


Bild 8:  
Synthetisiertes Profil mit Hüllkreis und  
statistischen Anteilsbereichen (Profil:  
zweiseitig, Hüllkreis: einseitig)

Als Messergebnis ist der Durchmesser des angrenzenden Kreises mit seiner Unsicherheit anzugeben. Dazu kommt der Anteil der zufälligen Restabweichungen in Form des einseitigen Anteilbereiches für vorgegebene Werte von  $P=1-\alpha$  und  $p$  als Obergrenze. Beim Kreis ist er (bezogen auf den Durchmesser) zu verdoppeln:

$$\text{Hüllkreis (HK): } D \leq (D_{HK} \pm u_D) + 2 s_r K_{1U}(n', p, 1-\alpha) \quad (15)$$

$$\text{Pferchkreis (PK): } D \geq (D_{PK} \pm u_D) - 2 s_r K_{1U}(n', p, 1-\alpha) \quad (16)$$

Die Faktoren für den einseitigen Anteilbereich  $K_{1U}(n', p, 1 - \alpha)$  sind [9] zu entnehmen. Dabei ist  $n'$  eine rechnerische Messwertanzahl, die sich aus folgender Überlegung ergibt: Die Faktoren der Anteilbereiche sind für Verteilungen und empirische Standardabweichungen mit  $n-1$  Freiheitsgraden berechnet. Bei geometrischen Messungen ist die Zahl der freien Parameter  $p$  jedoch meist größer als Eins, so dass sich die Zahl der Freiheitsgrade entsprechend verringert. Die rechnerische Messpunktzahl  $n'$  erhält man damit aus der Beziehung:

$$N = n - p + 1 \quad (17)$$

Für  $p=1$  ist wieder  $n'=n$ . Beim Soll-Ist-Vergleich ist zu fordern, dass das Paarungsmaß nach (15) bzw. (16) die Gutseite des Prüfmerkmals nicht überschreitet. Für die Unsicherheit des angrenzenden Profils, z.B.  $u_D$  beim Kreis, ist das Verhältnis zur Toleranz des Prüfmerkmals entsprechend der Goldenen Regel einzuhalten.

Für das Beispiel im Bild 7 beträgt die Standardabweichung der Restabweichungen  $0,6 \mu\text{m}$ , der Hüllkreisdurchmesser  $24,9495 \text{ mm}$ , seine Unsicherheit  $1,1 \mu\text{m}$  und der (verdoppelte) Anteilbereich  $5,5 \mu\text{m}$ , wenn  $P=1 - \alpha=0,95$  und  $p=0,95$  gewählt werden.

### Messunsicherheit für Formabweichungen

Für jeden Punkt des synthetisierten Profils kann eine Unsicherheit angegeben werden. Die Formabweichung ist die maximale Abweichung vom idealgeometrischen Ersatzelement. Wird das angrenzende Element gewählt, ergibt sich die Unsicherheit der Formabweichung durch quadratische Addition der Unsicherheitsanteile des synthetisierten Profils und des angrenzenden Elementes an der entsprechenden Stelle. Beim mittleren Element werden die Unsicherheiten der beiden Extremwerte quadratisch addiert. In ähnlicher Weise kann auch eine Unsicherheit für das Minimum-Element nach DIN ISO 1101 abgeleitet werden.

Es wurde aber schon erwähnt, dass der Streubereich der zufälligen Restabweichungen wesentlich breiter als der Konfidenzbereich des synthetisierten Profils ist. Bleibt man bei der Definition der Formabweichung als Maximalwert, ist zu dem systematischen Anteil auch der zufällige Anteil zu berücksichtigen. Seine Größe kann wieder als statistischer Anteilbereich abgeschätzt werden. Damit ist die Formabweichung  $E_F$  ebenso wie das Paarungsmaß als eine statistische Kenngröße aufzufassen, der eine statistische Sicherheit  $P=1 - \alpha$  und ein bestimmter Anteil  $p$  der Messwerte zugeordnet sind.

Der Streubereich der Restabweichungen liegt symmetrisch zum synthetisierten Profil. Der Anteilbereich wird deshalb für die zweiseitigen Toleranzgrenzen abgeschätzt und unabhängig von der Art des Ersatzelementes verdoppelt. Das vollständige Messergebnis lautet:

$$E_F \leq (E_{FSP} \pm u_{EF}) + 2 s_r K_{2U}(n', p, 1 - \alpha) \quad (18)$$

Der Faktor  $K_{2U}(n', p, 1 - \alpha)$  ist mit der rechnerischen Messwertanzahl  $n'$  nach (17) den Tafeln in [9] zu entnehmen. Beim Soll-Ist-Vergleich ist zu fordern, dass die Summe aus der Formabweichung des synthetisierten Profils  $E_{FSP}$  und der Breite des statistischen Anteilbereiches  $2s_r K_{2U}(n', p, 1 - \alpha)$  den zulässigen Wert der Formabweichung nicht überschreitet. Für die Unsicherheit der Formabweichung  $u_{EF}$  des synthetisierten Profils ist das Verhältnis zur Toleranz des Prüfmerkmals entsprechend der Goldenen Regel einzuhalten.

Für das Beispiel im Bild 7 liegt die Stelle mit dem größtem Abstand zwischen synthetisiertem Profil und Hüllkreis etwa beim Polarwinkel  $240^\circ$ . Die Formabweichung beträgt  $15,8 \mu\text{m}$ , ihre Unsicherheit  $1,1 \mu\text{m}$  und der (verdoppelte) Anteilbereich  $6,3 \mu\text{m}$ , wenn  $P=1 - \alpha=0,95$  und  $p=0,95$  gewählt werden.

### Messstrategie und weitere angrenzende Formelemente

Das Verfahren zur Approximation von Oberflächenprofilen und zur Abtrennung des zufälligen Messwertanteils ist recht aufwendig. Deshalb soll zunächst die Frage beantwortet werden, ob es in jedem Fall angewendet werden muss.

Nach dem im Punkt 4. beschriebenen Vorgehen können die Unsicherheiten der Formelemente mit den Standardabweichungen an den Ausgleichselementen abgeschätzt werden. Für die Reststreuung  $s_r$  setzt man die Standardabweichung am Ausgleichskreis ein. Unter der Annahme, dass die Messpunktabweichungen unabhängig und normalverteilt sind, lassen sich formal auch die statistischen Anteilsbereiche berechnen. Liegen sowohl diese als auch die Unsicherheiten der Ausgleichselemente innerhalb der zulässigen Werte, kann auf die verbesserte Abschätzung verzichtet werden.

Werden die Zeichnungstoleranzen oder die zulässigen Messunsicherheiten überschritten, stehen zwei Wege offen:

1. Wiederholung der Messung mit einer größeren Punktzahl, wenn zuvor nur wenige Punkte angetastet wurden. Dadurch verkleinern sich die Unsicherheiten und Anteilsbereiche für die Annahme unabhängiger und normalverteilter Messpunktabweichungen.
2. Verbesserte Profilapproximation und Trennung der systematischen und zufälligen Messwertanteile. Sind die Unsicherheiten bzw. die Anteilsbereiche immer noch zu groß, muss auch hier die Messpunktzahl vergrößert werden. Liegt die Reststreuung im Bereich der Gerätegenauigkeit, kann der Einsatz eines genaueren Messgerätes sinnvoll sein.

Liegt die Messunsicherheit deutlich unter der für die jeweiligen Prüfmerkmale zulässigen, kann unter Umständen der Aufwand, d.h. die Messpunktzahl, verringert werden. Das ist insbesondere bei stabilen Fertigungsbedingungen möglich, wenn sich die Reststreuung bei verschiedenen Teilen nicht wesentlich unterscheidet. Auf diese Weise können auch Richtwerte für Messpunktzahlen gewonnen werden. Diese gelten dann aber nur für die bereits bekannten stabilen Fertigungsbedingungen.

Das beschriebene Approximationsverfahren lässt sich nur auf den Vollkreis anwenden. Für den Kreisausschnitt und gerade Oberflächenprofile erfolgt die Profilapproximation durch nichtorthogonale trigonometrische Funktionen. Für komplexe Formelemente wie Ebenen und Zylinder stehen im Moment noch keine erprobten Verfahren zur Verfügung. In der Praxis werden diese Formelemente jedoch aus Gründen der rationellen Messung und der Ergebnisinterpretation häufig in Profilschnitten als Geraden und Kreise angetastet. In den einzelnen Schnitten können die bekannten Verfahren angewendet werden. Unter stabilen technologischen und Messbedingungen ist zu erwarten, dass die Reststreuung auf der ganzen Oberfläche etwa gleich ist. Es kann dann die mittlere Standardabweichung aus denen der einzelnen Schnitte berechnet werden. Die einzelnen synthetisierten Profile sind wieder der Ausgangspunkt zur Berechnung von angrenzenden Formelementen und Formabweichungen, wie oben beschrieben.

## Zusammenfassung

Der vorgestellte Modellansatz zur Trennung systematischer und zufälliger Messwertanteile bietet die Möglichkeit zu einer besseren Profilapproximation, als sie mit den bisher bekannten Ansätzen Ausgleichselement, Minimum-Element oder Hüll- bzw. Pufferelement erreichbar ist. Man erhält eine geschlossene Beschreibung der Oberfläche, wobei für jeden Punkt der Vertrauensbereich angegeben werden kann. Gleichzeitig erfolgt eine deutliche Reduzierung der Datenmenge.

Die erhaltenen Näherungselemente sind der Ausgangspunkt zur Berechnung der funktionell bedeutsamen angrenzenden Elemente. Für alle denkbaren Ersatzelemente können Formabweichungen berechnet und Messunsicherheiten angegeben werden. Damit ist es bereits anhand einer einzigen Messung möglich, die Genauigkeit im Vergleich mit der zulässigen Messunsicherheit zu beurteilen, und es wird ein wesentlicher Schritt zur metrologischen Absicherung von Ergebnissen geometrischer Messungen getan.

Die entsprechenden Algorithmen sollten von einer autorisierten Stelle erarbeitet und der Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden.

Neben dem in diesem Beitrag behandelten Anteil der zufälligen Messabweichungen sind für die vollständige Unsicherheitsangabe auch die abgeschätzten systematischen Anteile zu berücksichtigen. Hier muss ebenso wie bei der Diskussion weiterer Folgerungen auf die entsprechende Literatur verwiesen werden. Eine zusammenfassende Darstellung enthält [6].

## Literatur

- [1] DIN ISO 1101 (1985): Technische Zeichnungen. Geometrische Tolerierung; Form-, Richtungs-, Orts- und Lauf toleranzen. Allgemeines, Definitionen, Symbole, Zeichnungseintragungen
- [2] BS 7172 (1989): Assessment of position, size and departure from nominal form of geometric features (British Standard)
- [3] DIN 32880 Teil 1 (Entwurf 1986): Koordinatenmesstechnik. Geometrische Grundlagen und Begriffe
- [4] Rogazewski, P.: Ein Modell zur Auswertung von Messwertfolgen im Hinblick auf gemessene Oberflächenprofile. Metrologische Abhandlungen, Berlin 8 (1988) 4, S. 291-295
- [5] Rogazewski, P.: Die Verteilungsdichte der Fourierkoeffizienten normalverteilter Messwertanteile. Metrologische Abhandlungen, Berlin 8 (1988) 3, S. 217-223
- [6] Hernla, M.: Abschätzung der Messunsicherheit bei Koordinatenmessungen unter den Bedingungen der industriellen Fertigung. VDI-Fortschrittberichte Reihe 2 Nr. 274, 1992
- [7] Lotze, W.: Mathematische Modellierung der geometrischen Messtechnik. Technische Rundschau, Bern 82 (1990) 31, S. 36-45
- [8] DIN 55303 Teil 2 (1984): Statistische Auswertung von Daten. Testverfahren und Vertrauensbereiche für Erwartungswerte und Varianzen
- [9] DIN 55303 Teil 5 (1987): Statistische Auswertung von Daten. Bestimmung eines statistischen Anteilsbereiches